3.1 & 3.2 Szeregi formalne

Kluczowym i zarazem nowym pojęciem wykorzystywanym w rozdziale 3 jest pojęcie szeregu formalnego. Mówiąc nie do końca ściśle, ale jednocześnie w sposób wystarczający dla zastosowań, szereg to „nieskończony wielomian”, a więc suma postaci

$$a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n + \cdots ,$$

w której dopuszczamy nieskończenie wiele „składników”. W powyższym przedstawieniu T jest zmienną, a a_0, a_1, a_2, ... współczynnikami, które w naszych rozważaniach będą zawsze liczbami zespolonymi. Zbiór wszystkich szeregów formalnych o współczynnikach będących liczbami zespolonymi oznaczamy $\mathbb{C}[[T]]$. Szereg

$$a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n + \cdots ,$$

będziemy też zapisywać w skrócie jako $\sum_{n=0}^{\infty} a_nT^n$. Jeśli szereg jest wielomianem, tzn. istnieje N takie, że $a_n = 0$ dla $n > N$ (innymi słowy, suma jest skończona), to zapisujemy go często w tradycyjny sposób

$$a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_NT^N.$$

W szczególności, gdy λ jest liczbą zespolona, to traktujemy ją często jako szereg

$$\lambda + 0 \cdot T + 0 \cdot T^2 + \cdots + 0 \cdot T^n + \cdots .$$

Szeregi formalnie możemy dodawać, odejmować i mnożyć w analogiczny sposób jak to czynimy z wielomianami. Innymi słowy, mamy wzory

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nT^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_nT^n := \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)T^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nT^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_nT^n := \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)T^n,$$

oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nT^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_nT^n := \sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_kb_{n-k} + \cdots + a_nb_0)T^n.$$

Zbiór $\mathbb{C}[[T]]$ z powyższymi działaniami jest pierścieniem, elementami neutralnymi dla dodawania i mnożenia są odpowiednio szeregi 0 i 1, tj. szeregi

$$0 + 0 \cdot T + 0 \cdot T^2 + \cdots + 0 \cdot T^n + \cdots$$

i

$$1 + 0 \cdot T + 0 \cdot T^2 + \cdots + 0 \cdot T^n + \cdots .$$

Podobnie jak wielomiany, również szeregi nie tworzą ciała, a więc w ogólności w zbiorze $\mathbb{C}[[T]]$ nie jest wykonywalne dzielenie. W odróżnieniu jednak od pierścienia wielomianów klasa szeregów, przez które można dzielić (a więc które, używając bardziej formalnej terminologii, są odwracalne), jest bogatsza. Przypomnijmy, że wielomian $F \in \mathbb{C}[T]$ jest odwracalny (jako element pierścienia wielomianów) wtedy i tylko wtedy, gdy F jest niezerowym wielomianem stałym. W przypadku szeregów odpowiednia charakteryzacja wygląda następująco.

Lemma 3.1. *Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 \neq 0$.*

Jeśli $\mathcal{A}$ jest szeregiem odwracalnym, to szereg odwrotny (a więc taki szereg $\mathcal{A}'$, że $\mathcal{A}' \cdot \mathcal{A} = 1$) oznaczamy $\mathcal{A}^{-1}$. Jeśli dodatkowo $\mathcal{B}$ jest szeregiem, to iloczyn $\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{B}$ oznaczamy $\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$.

Dzielenie szeregów (równoważnie, szukanie szeregu odwrotnego) w ogólności polega na rozwiązywaniu układu nieskończenie wielu równań z nieskończenie wieloma niewiadomymi (niewiadome odpowiadają współczynnikom poszukiwanego ilorazu). Wzór na iloczyn implikuje, że ten układ ma postać trójkątną, a warunek z Lematu 3.1 odpowiada za to, aby współczynniki na przekątnej były niezerowe, co gwarantuje istnienie (i jednoznaczność) rozwiązania.

W ogólności wykonanie dzielenia, a więc rozwiązanie powyższego układu równań, nie jest łatwe, ze względu na jego nieskończony charakter. Omówimy teraz w jaki sposób wyliczać w pierścieniu szeregów iloraz dwóch wielomianów. Zauważmy, że jeśli

$$F = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_N T^N$$

jest wielomianem, to warunek $a_0 \neq 0$ jest równoważny warunkowi $F(0) \neq 0$ (gdzie jak zwykle $F(0)$ oznacza wartość wielomianu F dla 0).

Jeśli F i G są wielomianami takimi, że $F \neq 0$, to wykonując dzielenie wielomanów z resztą, możemy znaleźć wielomiany Q i R takie, że

$$G = Q \cdot F + R \qquad \text{i} \qquad \deg R < \deg F.$$

Wtedy

$$\frac{G}{F} = Q + \frac{R}{F},$$

zatem w dalszych rozważaniach możemy założyć, że $\deg G < \deg F$.

Ponieważ pracujemy nad ciałem liczb zespolonych, więc wiadomo, że istnieją parami różne liczby zespolone μ, λ_1, …, λ_k oraz dodatnie liczby całkowite m_1, …, m_k takie, że

$$F = (T - \lambda_1)^{m_1} \cdots (T - \lambda_k)^{m_k}.$$

Jeśli dodatkowo założymy, że $F(0) \neq 0$, to oczywiście $\lambda_i \neq 0$ dla każdego i. Jeśli w przypadku wielomianu F możliwe jest znalezienie liczb λ_1, …, λ_k (a w konsekwencji również wykładników m_1, …, m_k), to przy założeniu, że $\deg G < \deg F$, wiadomo, że istnieją liczby zespolone $A_{i,j}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m_k$, takie, że

$$\begin{aligned}\frac{G}{F} = \frac{A_{1,1}}{1 - \lambda_1^{-1} T} + \frac{A_{1,2}}{(1 - \lambda_1^{-1} T)^2} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(1 - \lambda_1^{-1} T)^{m_1}} + \cdots \\ + \frac{A_{k,1}}{1 - \lambda_k^{-1} T} + \frac{A_{k,2}}{(1 - \lambda_k^{-1} T)^2} + \cdots + \frac{A_{k,m_k}}{(1 - \lambda_k^{-1} T)^{m_k}}.\end{aligned}$$

Aby znaleźć liczby $A_{i,j}$ wystarczy sprowadzić ułamki po prawej stronie do wspólnego mianownika, a następnie je dodać i przyrównać otrzymany licznik do wielomianu $\frac{1}{F(0)} \cdot G$, jak w poniższym przykładzie.

Przykład. Przypuśćmy, że

$$G = 2 - 5T + 4T^2 \qquad \text{i} \qquad F = 1 - 4T + 5T^2 - 2T^3.$$

Ponieważ pierwiastkami wielomianu F są 1 (dwukrotnym) i $\frac{1}{2}$ (jednokrotnym), więc szukamy liczb A, B i C takich, że

$$\frac{2 - 5T + 4T^2}{1 - 4T + 5T^2 - 2T^3} = \frac{A}{1 - T} + \frac{B}{(1 - T)^2} + \frac{C}{1 - 2T}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}&\frac{A}{1 - T} + \frac{B}{(1 - T)^2} + \frac{C}{1 - 2T} \\ &\quad = \frac{A(1 - T)(1 - 2T) + B(1 - 2T) + C(1 - T)^2}{(1 - T)^2 (1 - 2T)} \\ &\quad = \frac{(A + B + C) + (-3A - 2B - 2C)T + (2A + C)T^2}{(1 - T)^2 (1 - 2T)},\end{aligned}$$

zatem równość

$$\frac{2 - 5T + 4T^2}{1 - 4T + 5T^2 - 2T^3} = \frac{A}{1 - T} + \frac{B}{(1 - T)^2} + \frac{C}{1 - 2T}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczby A, B i C są rozwiązaniami układu równań

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ -3A - 2B - 2C = -5 \\ 2A + C = 4 \end{cases},$$

skąd $A = 1$, $B = -1$ i $C = 2$. Ostatecznie

$$\frac{2 - 5T + 4T^2}{1 - 4T + 5T^2 - 2T^3} = \frac{1}{1 - T} - \frac{1}{(1 - T)^2} + 2 \cdot \frac{1}{1 - 2T}.$$

Z powyższych rozważań wynika, że kluczowa jest umiejętność wyliczania ilorazów postaci

$$\frac{1}{(1 - \lambda T)^m},$$

dla niezerowej liczby zespolonej λ oraz dodatniej liczby całkowitej m. Gdy $m = 1$, to łatwo zauważyć, że

$$\frac{1}{1 - \lambda T} = 1 + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \cdots + \lambda^m T^m + \cdots .$$

Uogólnieniem powyższego wzoru jest następujący fakt.

Wniosek 3.4. *Jeśli λ jest niezerową liczbą zespoloną i m jest dodatnią liczbą całkowitą, to*

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - \lambda T)^m} = & \binom{m-1}{m-1} + \binom{m}{m-1} \lambda T \\ & + \binom{m+1}{m-1} \lambda^2 T^2 + \cdots + \binom{m+n-1}{m-1} \lambda^n T^n + \cdots . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Aby udowodnić powyższy wniosek, wystarczy sprawdzić wzór (3.1) dla $\lambda = -1$, a więc udowodnić następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 3.3. *Jeśli m jest dodatnią liczbą całkowitą, to*

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + T)^m} = & \binom{m-1}{m-1} - \binom{m}{m-1} T \\ & + \binom{m+1}{m-1} T^2 + \cdots + (-1)^n \binom{m+n-1}{m-1} T^n + \cdots . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Istotnie, wzór (3.1) wynika natychmiast ze wzoru (3.2) po podstawieniu $-\lambda T$ za T.

Udowodnimy teraz Stwierdzenie 3.3.

Dowód. Dla liczby zespolonej x niech $\mathcal{A}_x$ będzie szeregiem formalnym

$$\binom{x}{0} + \binom{x}{1}T + \binom{x}{2}T^2 + \cdots + \binom{x}{n}T^n + \cdots .$$

Ponieważ $\binom{m}{n} = 0$, gdy $n > m$, więc korzystając ze wzoru dwumiennego Newtona (Wniosek 2.4), otrzymujemy, że

$$\mathcal{A}_m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}T + \binom{m}{2}T^2 + \cdots + \binom{m}{m}T^m = (1+T)^m.$$

Podobnie, $\binom{0}{n} = 0$, gdy $n > 0$, więc

$$\mathcal{A}_0 = \binom{0}{0} = 1.$$

Ponadto,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_m \cdot \mathcal{A}_{-m} &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} T^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-m}{n} T^n\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\binom{m}{0}\binom{-m}{n} + \binom{m}{1}\binom{-m}{n-1} + \cdots + \binom{m}{n}\binom{-m}{0}\Big) \cdot T^n.\end{aligned}$$

Ze wzoru Chu–Vandermonde'a (Wniosek 2.11) wiemy, że

$$\binom{m}{0}\binom{-m}{n} + \binom{m}{1}\binom{-m}{n-1} + \cdots + \binom{m}{n}\binom{-m}{0} = \binom{m+(-m)}{n} = \binom{0}{n},$$

zatem

$$\mathcal{A}_m \cdot \mathcal{A}_{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{0}{n} T^n = \mathcal{A}_0 = 1.$$

Stąd

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+T)^m} = \frac{1}{\mathcal{A}_m} &= \mathcal{A}_{-m} \\ &= \binom{-m}{0} + \binom{-m}{1}T + \binom{-m}{2}T^2 + \cdots + \binom{-m}{n}T^n + \cdots .\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\binom{-m}{n} &= \frac{(-m)\cdot(-m-1)\cdots(-m-(n-2))\cdot(-m-(n-1))}{n!}\\ &= \frac{(-m-n+1)\cdot(-m-n+2)\cdots(-m-1)\cdot(-m)}{n!}\\ &= \frac{(-1)^n(m+n-1)\cdot(m+n-2)\cdots(m+1)\cdot m}{n!}\\ &= (-1)^n\binom{m+n-1}{n} = (-1)^n\binom{m+n-1}{m-1}.\end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+T)^m} = \binom{m-1}{m-1} - \binom{m}{m-1}T\\ + \binom{m+1}{m-1}T^2 + \cdots + (-1)^n\binom{m+n-1}{m-1}T^n + \cdots\,,\end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$